PART4 必要条件と十分条件，条件の否定

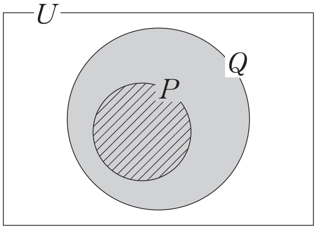
要点① 必要条件と十分条件

2つの条件 p，q について，命題 $p \Rightarrow q$ が真であるとき，条件 p，q を満たすもの全体の集合をそれぞれ P，Q とすると $P \subset Q$ である。このとき，

p は q であるための「　　　　　　」

q は p であるための「　　　　　　」

という。



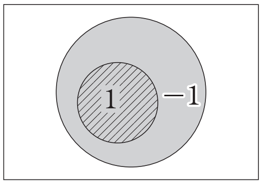
例 x を実数とするとき，命題「$x=1 \Rightarrow x^2=1$」は真である。

よって

$x=1$ は $x^2=1$ であるための「　　　条件」

$x^2=1$ は $x=1$ であるための「　　　条件」

である。



2つの命題 $p \Rightarrow q$，$q \Rightarrow p$ がともに真であるとき，「p 　 q」と表し，p は q であるための「　　　　　　　　」という。このとき，q は p であるための必要十分条件である。

p 　 q のとき，p と q は「　　　」であるという。

例 x を実数とするとき「$x=0 \Rightarrow x^2=0$」，「$x^2=0 \Rightarrow x=0$」はともに真である。

よって

$x=0$ は $x^2=0$ であるための必要十分条件

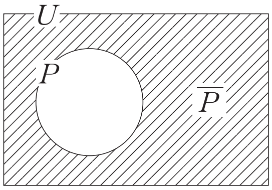
$x^2=0$ は $x=0$ であるための必要十分条件

であり，$x=0$ と $x^2=0$ は同値である。

要点② 条件の否定

条件 p に対して，条件「p でない」を条件 p の「　　　」といい，と表す。条件 $\overline{p}$ の否定 $\left(\overline{\overline{p}}\right)$ は p である。

条件 $\overline{p}$ を満たすもの全体の集合は，条件 p を満たすもの全体の集合 P の補集合 $\overline{P}$ である。



例　x を実数とするとき，条件「$x>1$」の否定は　「　　　」

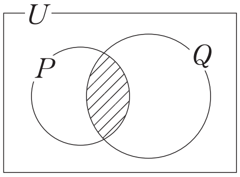
x を整数とするとき，条件「x は偶数である」の否定は　「x は　　　　である」

条件 p，q を満たすもの全体の集合をそれぞれ P，Q とすると

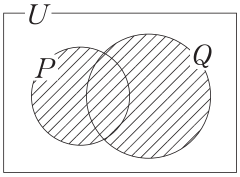
条件「p かつ q」を満たすもの全体の集合は　P　Q

条件「p または q」を満たすもの全体の集合は　P　Q

である。



p かつ q



p または q

ド・モルガンの法則により

$$\overline{P \cup Q} = \overline{P} \cap \overline{Q},\quad \overline{P \cap Q} = \overline{P} \cup \overline{Q}$$

が成り立つことから，条件 p，q に関して，次のことが成り立つ。

「p かつ q」の否定，「p または q」の否定

$\overline{p\text{かつ}q} \Leftrightarrow \overline{p}$ または $\overline{q}$，$\overline{p\text{または}q} \Leftrightarrow \overline{p}$ かつ $\overline{q}$

例　x，y を実数とするとき

「$x=1$ かつ $y=2$」の否定は　「$x \neq 1$　　　　　$y \neq 2$」

「$x>0$ または $y>0$」の否定は　「$x \leqq 0$　　　$y \leqq 0$」

4　x，y は実数とする。次の問いに答えよ。

(1)　次の [　　] に「必要条件であるが十分条件ではない」「十分条件であるが必要条件ではない」「必要十分条件である」「必要条件でも十分条件でもない」のうち適切なものを入れよ。

(ⅰ)　$x=3$ は $x^2=3x$ であるための [　　]。

(ⅱ)　$x \leqq 2$ は $x<2$ であるための [　　]。

(ⅲ)　$x=0$ は，$|x|=0$ であるための [　　]。

(ⅳ)　$xy>0$ は，$x+y>0$ であるための [　　]。

(2)　次の条件の否定を述べよ。ただし，x，y は実数とする。

(ⅰ)　x は有理数である。　(ⅱ)　$x=0$ かつ $y=0$　(ⅲ)　$x<4$ または $y \geqq -2$

Point Pickup

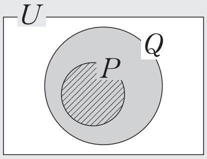
必要条件・十分条件

条件 p，q について

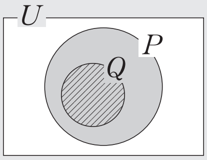
$p \Rightarrow q$ が真ならば，p は q であるための　　　　条件

$q \Rightarrow p$ が真ならば，p は q であるための　　　　条件

$p \Leftrightarrow q$ ならば，p は q であるための　　　　条件



p は十分条件



p は必要条件

$p \Rightarrow q$，$q \Rightarrow p$ がともに偽ならば，p は q であるための必要条件でも十分条件でもない。

条件の否定

条件 p の否定 $\overline{p}$，条件 q の否定 $\overline{q}$ について

$\overline{p\text{かつ}q} \Leftrightarrow \overline{p}$ または $\overline{q}$，$\overline{p\text{または}q} \Leftrightarrow \overline{p}$ かつ $\overline{q}$

第 5 講　PART4 確認問題

x，y は実数とする。

1　$x=2$ は，$x^2=4$ であるための ア 。

ア は，次の①～④のうちから選べ。

① 必要条件であるが十分条件ではない
② 十分条件であるが必要条件ではない
③ 必要十分条件である
④ 必要条件でも十分条件でもない

2　$x<1$ は，$2x+3<1$ であるための イ 。

イ は，次の①～④のうちから選べ。

① 必要条件であるが十分条件ではない
② 十分条件であるが必要条件ではない
③ 必要十分条件である
④ 必要条件でも十分条件でもない

3　$x^2=25$ は，$|x|=5$ であるための ウ 。

ウ は，次の①～④のうちから選べ。

① 必要条件であるが十分条件ではない
② 十分条件であるが必要条件ではない
③ 必要十分条件である
④ 必要条件でも十分条件でもない

4 $xy<0$ は，$x+y<0$ であるための エ 。

エ は，次の①～④のうちから選べ。

① 必要条件であるが十分条件ではない

② 十分条件であるが必要条件ではない

③ 必要十分条件である

④ 必要条件でも十分条件でもない

5 「x は正の数である」

この条件の否定は オ である。

オ は次の①～③のうちから選べ。

① x は 0 である。

② x は負の数である。

③ x は 0 以下の数である。

6 「$x=1$ かつ $y=2$」

この条件の否定は カ である。

カ は次の①～③のうちから選べ。

① $x \neq 1$ かつ $y \neq 2$

② $x>1$ または $y>2$

③ $x \neq 1$ または $y \neq 2$

7 「$x>0$ または $y \leqq 1$」

この条件の否定は キ である。

キ は次の①～③のうちから選べ。

① $x<0$ かつ $y>1$

② $x \leqq 0$ かつ $y>1$

③ $x \leqq 0$ または $y>1$

[MEMO]

PART4 必要条件と十分条件，条件の否定

4 x，y は実数とする。次の問いに答えよ。

(1) 次の □ に「必要条件であるが十分条件ではない」「十分条件であるが必要条件ではない」「必要十分条件である」「必要条件でも十分条件でもない」のうち適切なものを入れよ。

(i) $x=3$ は $x^2=3x$ であるための □。

(ii) $x \leqq 2$ は $x<2$ であるための □。

(iii) $x=0$ は，$|x|=0$ であるための □。

(iv) $xy>0$ は，$x+y>0$ であるための □。

(2) 次の条件の否定を述べよ。ただし，x，y は実数とする。

(i) x は有理数である。　(ii) $x=0$ かつ $y=0$　(iii) $x<4$ または $y \geqq -2$

[解答]

(1)(i) $x^2=3x$ より $x^2-3x=0$　$x(x-3)=0$　$x=0$，3

$x=3 \Rightarrow x^2=3x$ は真

$x^2=3x \Rightarrow x=3$ は偽(反例：$x=0$)

よって，$x=3$ は $x^2=3x$ であるための十分条件であるが必要条件ではない。

(ii) $x \leqq 2 \Rightarrow x<2$ は偽(反例：$x=2$)

$x<2 \Rightarrow x \leqq 2$ は真

よって，$x \leqq 2$ は $x<2$ であるための必要条件であるが十分条件ではない。

(iii) $x=0 \Rightarrow |x|=0$ は真

$|x|=0 \Rightarrow x=0$ は真

よって，$x=0$ は，$|x|=0$ であるための必要十分条件である。

(iv) $xy>0 \Rightarrow x+y>0$ は偽(反例：$x=-1$，$y=-2$)

$x+y>0 \Rightarrow xy>0$ は偽(反例：$x=-1$，$y=2$)

よって，$xy>0$ は，$x+y>0$ であるための必要条件でも十分条件でもない。

(2)(i) x は無理数である　(ii) $x \neq 0$ または $y \neq 0$　(iii) $x \geqq 4$ かつ $y<-2$

第 5 講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：②

[解説]

p：「$x=2$」，q：「$x^2=4$」とする。

$p \Longrightarrow q$ は，真

$q \Longrightarrow p$ は，偽（反例：$x=-2$）

よって，p は q であるための**十分条件であるが必要条件ではない。** [A]

[A]　$p \Longrightarrow q$ が真のとき，
p は q であるための十分条件
$q \Longrightarrow p$ が真のとき，
p は q であるための必要条件

2

[正解] イ：①

[解説]

p：「$x<1$」，q：「$2x+3<1$」とする。

$2x+3<1$ のとき，$x<-1$

$p \Longrightarrow q$ は，偽（反例：$x=0$）

$q \Longrightarrow p$ は，真

よって，p は q であるための**必要条件であるが十分条件ではない。** [B]

[B]　$p \Longrightarrow q$ が真のとき，
p は q であるための十分条件
$q \Longrightarrow p$ が真のとき，
p は q であるための必要条件

3

[正解] ウ：③

[解説]

p：「$x^2=25$」，q：「$|x|=5$」とする。

$x^2=25$ のとき，$x=\pm5$

このとき，$|x|=5$ は成り立つ。

$|x|=5$ のとき，$x=\pm5$

このとき，$x^2=25$ は成り立つ。

$p \Longrightarrow q$ は，真

$q \Longrightarrow p$ は，真

よって，p は q であるための**必要十分条件である。**

[C]

[C]　$p \Longrightarrow q$，$q \Longrightarrow p$ がともに真のとき，
p は q であるための必要十分条件

4 [正解] エ：④

[解説]

p：「$xy<0$」，q：「$x+y<0$」とする。

$p \Longrightarrow q$ は，偽（反例：$x=2$，$y=-1$）

$q \Longrightarrow p$ は，偽（反例：$x=-1$，$y=-2$）

よって，p は q であるための**必要条件でも十分条件でもない。** [D]

[D]　$p \Longrightarrow q$，$q \Longrightarrow p$ がともに偽のとき，
p は q であるための必要条件でも十分条件でもない。

5 [正解] オ：③

[解説]

「x は正の数である」

この条件の否定は，

「x は正の数でない」 [E]

つまり，**x は 0 以下の数である。**

[E]　条件 p の否定は「p でない」

6 [正解] カ：③

[解説]

「$x=1$ かつ $y=2$」の否定は， [F]

$x \neq 1$ または $y \neq 2$

[F]　「p かつ q」の否定は，
「$\overline{p}$ または $\overline{q}$」

7 [正解] キ：②

[解説]

「$x>0$ または $y \leqq 1$」の否定は， [G]

$x \leqq 0$ かつ $y>1$

[G]　「p または q」の否定は，
「$\overline{p}$ かつ $\overline{q}$」